微波加热中“热失控”的一维数值模拟

刘长军　闫丽萍　黄卡玛

四川大学电子信息学院，成都（610064）

摘要：本文对微波加热陶瓷过程进行了数值模拟，使用时域有限差分的进行电磁场分布的计算，耦合热传导方程计算微波加热过程中的温度变化。通过计算不同入射微波功率对应的介质的稳态温度，对微波加热过程中的热失控现象进行了初步分析。

关键词：时域有限差分，Biot 系数，热传导

微波加热技术在工业、化工、食品、材料等领域都用广泛的使用。微波加热过程中，一些材料的介质特性随温度发生变化，导致一些特殊的宏观热现象。例如：在微波焊接陶瓷、微波加热矿物、微波加热橡胶等过程中，出现材料温度持续升高直至烧毁的现象。热失控现象阻碍了微波加热的产业化应用。

热失控是由于电磁波与物质的相互作用导致的一种非稳定的热现象。例如：在微波加热介质的过程中，如果某个局部的热传递速率低于微波功率损耗速率，将会导致局部温度的升高和介质特性的变化。如果介质特性的这种变化加速了介质局部对微波功率的损耗，从而由于“正反馈”过程形成了热点，这就是一个局部的热失控现象。在一些条件下，局部的热失控现象会体现为宏观的非稳定热现象。

使用时域有限差分算法耦合热传导方程对一维微波加热陶瓷介质中的热失控现象进行数值模拟。在 Biot 系数较小的条件下，模拟了稳态温度与微波功率之间的不连续变化。使用本方法可望对更为复杂的模型进行数值仿真，促进微波加热的研究。

1 微波加热模型

微波加热过程中电磁场满足Maxwell方程，如方程(1)所示。

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}&=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\sigma\vec{E}\end{aligned}\tag{1}$$

其中σ为电导率。在一些应用中使用 TEM 模式进行微波加热，可以适当简化为一维问题。

热传导方程为

$$\rho C_p\frac{\partial T(z)}{\partial t}=K\frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2}+P_d(z)\tag{2}$$

其中T为温度，ρ为介质的密度，C_p为比热系数，K为热传导系数，P_d为微波耗散功率。如果忽略介质的极化损耗，微波耗散功率可以用电场强度表示为

中国知网　https://www.cnki.net

$$P_d(z)=\frac{1}{2}\sigma\left|E(z)\right|^2 \tag{3}$$

假设陶瓷介质周围的温度为T_0，保持不变。热传导方程的边界条件为

$$K\frac{\partial T(z)}{\partial z}=h\left[T(z)-T_0\right]+se\left[T^4(z)-T_0^4\right] \tag{4}$$

其中 h 为热对流常数，s 和 e 分别为热辐射常数和表面辐射率。

实验研究发现，陶瓷的电导率随着温度的升高而增大，并且呈现出非线性的关系。这种非线关系一般可以使用指数函数模型或者 Arranius 模型进行描述。如果采用指数函数模型，陶瓷电导率与温度的关系表示为

$$\sigma(T)=\sigma_0\exp\left[k\frac{T-T_0}{T}\right] \tag{5}$$

其中σ_0为温度为T_0时陶瓷介质的电导率，k为材料相关的常数。在陶瓷加热的热失控研究中，通常使用Biot系数描述介质尺度与热参数之间的关系。Biot系数定义为

$$\mathrm{B}=\frac{lh}{K} \tag{6}$$

其中 l 为介质的尺度，在一维模型中 l 为陶瓷介质的厚度。

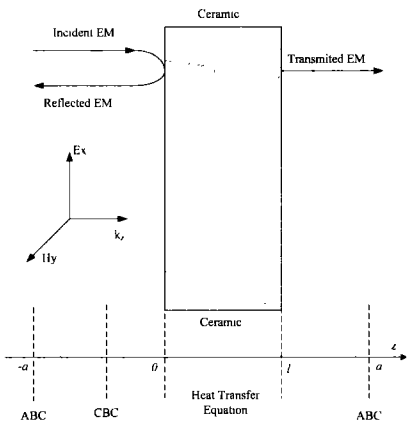

图 1 一维微波加热的计算模型

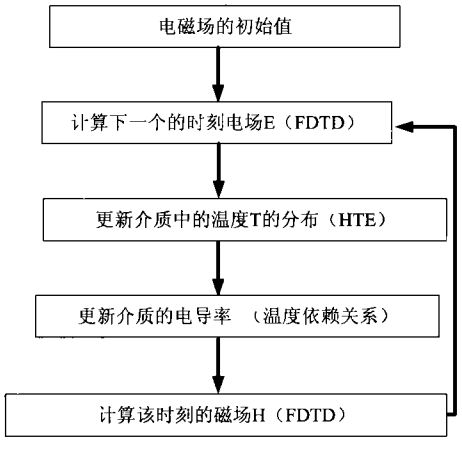

图 2 数值模拟计算的流程图

如图 1所示为一维加热的计算模型，阴影部分代表厚度为l的陶瓷，电磁波为TEM模式。求解热传导方程的对应区间为$[0,l]$，求解电磁场方程的对应区间为$[-a,a]$。采用此计算模型，在经过耦合算法就可以完成对微波加热过程的数值模拟。

2 数值模拟方法

由于在微波加热过程中介质的特性会随着温度发生改变，在电磁场的数值模拟中需要处理时变介质问题。选用时域有限差分法进行电磁场的数值模拟，直接从时域求解电

中国知网 https://www.cnki.net

磁场问题可以方便地处理时变介质，而且便于与热传导方程进行耦合求解。如图 1所示，在两侧ABC处施加吸收边界，选用一阶Mur吸收边界。连接边界位于陶瓷与左侧吸收边界之间，以CBC进行标示。在介质分界面处，边界条件由FDTD算法自行满足。

FDTD 算法的时间步长和空间步长受到 Courant 法则的限制。在实际模拟计算中，选取时间步长Δt 为

$$\Delta t = \frac{c}{2\Delta z} \tag{7}$$

其中Δz为空间步长，c为真空中的光速。按照传统的差分格式对方程(2)进行离散

$$T^{n+\frac{1}{2}}(k) = T^{n-\frac{1}{2}}(k) + \frac{\Delta t_{HTE}}{\rho C_p}\left[K\frac{T^{n-\frac{1}{2}}(k+1) - 2T^{n-\frac{1}{2}}(k) + T^{n-\frac{1}{2}}(k-1)}{\Delta z^2} + \frac{1}{2}\sigma^{n-\frac{1}{2}}(k)\left|E^n(k)\right|^2\right] \tag{8}$$

其中Δt_{HTE}为热传导方程的时间步长，k表示空间位置（z=kΔz），上标表示时间（t=nΔt_{HTE}）。

将边界条件(4)式和热传导方程离散结果(8)式一起处理，可以得到差分方程的边界条件。例如，对于左侧边界可以得到

$$T^{n+\frac{1}{2}}(1) = T^{n-\frac{1}{2}}(1) + \frac{\Delta t_{HTE}}{\rho C_p}\left[K\frac{T^{n-\frac{1}{2}}(2) - T^{n-\frac{1}{2}}(1)}{\Delta z^2} - h\left(T^{n-\frac{1}{2}}(1) - T_0\right) - se\left(T^{n-\frac{1}{2}}(1)^4 - T_0^4\right) + \frac{1}{2}\sigma^{n-\frac{1}{2}}(1)\left|E^n(1)\right|^2\right] \tag{9}$$

离散后的热传导方程需要满足稳定条件

$$\Delta t_{HTE} < \frac{\rho C_p}{2K}\Delta z^2 \tag{10}$$

在微波加热过程的数值模拟中，FDTD方法中的时间步长Δt的典型值约为 10^{-10}s量级（对于 1GHz的微波）。微波加热的时间通常持续约 10^2s。如果直接使用FDTD模拟微波加热的过程，需要计算约 10^{12}个时间步。在微波加热的FDTD模拟计算中可以引入时间压缩因子，通过比例关系将FDTD中的时间步长Δt与热传导方程中的时间步长Δt_{HTE}变换到一个数量级，从而可以将Maxwell方程和热传导方程的求解耦合在一起完成。耦合两个方程进行数值求解的流程图如图 2所示。通过交替更新电磁场并且更新温度和电导率，实现方程的耦合求解。

3 数值模拟结果

考虑微波加热陶瓷介质的一维模型，入射微波的频率f=915MHz。陶瓷介质的密度和比热系数选取实验参考值，相对介电常数为 $\varepsilon_r = 9$，相对导磁率为 $\mu_r = 1$，导热系数

中国知网 https://www.cnki.net

$K=0.4$，热对流常数$h=3$。选取陶瓷介质厚度为l=1mm，可以确定Biot系数为 0.0075。介质的电导率选用指数模型。当介质的初始温度分别为T_0=273K和 $4T_0$时，模拟计算不同功率的微波入射下加热达到热平衡时，陶瓷介质的稳态温度，结果如图 3中实线所示。当电场强度达到 2400V/m附近时，稳态温度会出现一个突变。在临界点附近，微波功率很小的增加，会导致稳态温度的突变，出现“热失控”现象。当初始温度为 $4T_0$时将会现温度下降的过程，如图 3中虚线所示。

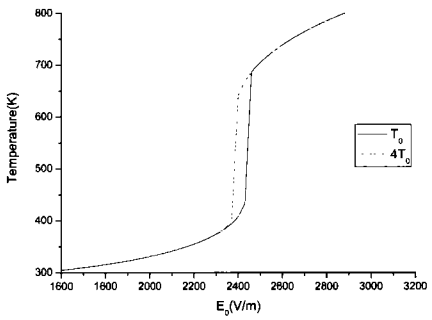

图 3 不同微波功率对应的稳态温度

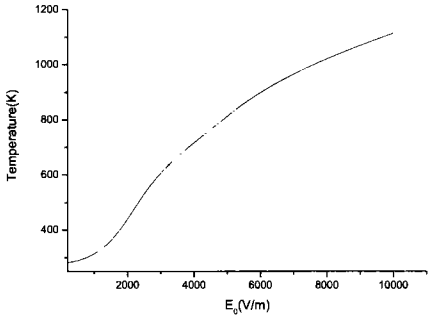

图 4 Biot 系数为 0.075 时功率与稳态温度的关系

当 Biot 系数的增加到 0.075，图 5 给出了微波功率与稳态温度的关系，可以看出已经没有了热失控现象。只有当满足 Biot 系数较小的条件时，才可能出现热失控现象。

4 讨论与展望

为了实现对波导中介质加热过程中热失控现象的模拟，需要建立二维模型或者三维模型。使用类似的方法耦合 Maxwell 方程和热传导方程，实现微波加热过程的模拟。通过使用更为复杂的二维或者三维模型，可望对更多的实验现象进行模拟

微波化学研究中也发现了类似的现象。当利用微波加热化学反应时，出现温度的急剧升高，导致反应物或者产物的烧毁。使用类似的数值模拟方法对微波加热化学反应进行数值模拟，研究微波化学中的热失控现象是具有参考价值的。

5 参考文献

1. G.A. Kriegsmann and J.H.C. Luke, Microwave joining of two long hollow tubes: an asymptotic theory and numerical simulations. J. of Eng. Math., 2001, Vol 39:63-78
2. J.M. Hill and T.R. Marchant. Modelling microwave heating. Appl. Math. Modelling. 1996, Vol. 20(1):3-15
3. 刘长军，黄卡玛。化学反应对微波非线性响应的实验研究和数值模拟，微波学报，2000，16(2)
4. 闫丽萍，黄卡玛，刘长军。微波加热 FDTD 模拟中时间压缩因子的研究，四川大学学报（自然科学版）2003,40(2)

中国知网 https://www.cnki.net